Trivial Poursuite Mathématique

12 Mai 2016

Calcul différentiel, Q1

Calcul différentiel, Q1

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| < 1.$$

Le Jacobien de l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x, y) = (y + f(x), x + f(y))$$

est-il inversible ?

Calcul différentiel, Q2

Calcul différentiel, Q2

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f, g et h trois fonctions de $U \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in U, \quad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x).$$

On suppose que f et g sont différentiables en $a \in U$ et que $f(a) = h(a)$. Montrer que $d(h - f)(a) = 0$. En déduire que g est différentiable en a et calculer $dg(a)$.

Calcul différentiel, Q3

Calcul différentiel, Q3

Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ solutions du système suivant :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Calcul différentiel, Q4 et Q5

Calcul différentiel, Q4 et Q5

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne et de sa norme euclidienne, $N(.) = \|.\|_2$.

1. Montrer que N est une application différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et calculer sa différentielle.

Calcul différentiel, Q4 et Q5

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne et de sa norme euclidienne, $N(.) = \|.\|_2$.

1. Montrer que N est une application différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et calculer sa différentielle.
2. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ croissante. On pose $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $F(x) = f(N(x))x$. Calculer la différentielle de F et montrer que

$$\forall (x,h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \langle DF(x).h, h\rangle \geqslant f(N(x))N(h)^2.$$

Calcul différentiel, Q6

Calcul différentiel, Q6

Déterminer les extrema locaux et globaux de $f(x, y) = x(x+1)^2 - y^2$.

Calcul différentiel, Q7

Calcul différentiel, Q7

Déterminer les extrema locaux et globaux de
$f(x, y) = \sin(x) + y^2 - 2y + 1$.

Calcul différentiel, Q8 et Q9

Calcul différentiel, Q8 et Q9

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (2x + y - z)(x + y + 2z).$$

1. Déterminer l'ensemble des points critiques de f.

Calcul différentiel, Q8 et Q9

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (2x + y - z)(x + y + 2z).$$

1. Déterminer l'ensemble des points critiques de f.
2. Déterminer la nature de ces points critiques.

Calcul différentiel, Q10

Calcul différentiel, Q10

Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que N n'est pas différentiable en 0.

Calcul différentiel, Q11

Calcul différentiel, Q11

Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ solutions du système suivant :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = xy^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 y.$$

Suites et séries de fonctions, Q1

Suites et séries de fonctions, Q1

La suite de fonctions

$$f_n(x) = n^2 x^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{x^n}{2n+1} \right)$$

converge-t-elle simplement sur $[0, 1]$? uniformément ?

Suites et séries de fonctions, Q2

Suites et séries de fonctions, Q2

La suite de fonctions $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ converge-t-elle simplement $[0, +\infty[$? Uniformément ?

Suites et séries de fonctions, Q3

Suites et séries de fonctions, Q3

La suite de fonctions $f_n(x) = nx^n \ln(x)$ converge-t-elle simplement sur $[0, 1]$? uniformément ?

Suites et séries de fonctions, Q4

Suites et séries de fonctions, Q4

La suite de fonctions $f_n(x) = x^{2n} \ln(x)$ converge-t-elle simplement sur $[0, 1]$? uniformément ?

Suites et séries de fonctions, Q5

Suites et séries de fonctions, Q5

Étudier les convergences de la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Suites et séries de fonctions, Q6 et Q7

Suites et séries de fonctions, Q6 et Q7

On pose $u_n(x) = x^{n+1}\ln(x)$ si $x \in [0,1]$ et $u_n(0) = 0$.

1. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ ne converge pas uniformément.

Suites et séries de fonctions, Q6 et Q7

On pose $u_n(x) = x^{n+1}\ln(x)$ si $x \in [0,1]$ et $u_n(0) = 0$.

1. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ ne converge pas uniformément.
2. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n(x)$ converge uniformément.

Suites et séries de fonctions, Q8 et Q9

Suites et séries de fonctions, Q8 et Q9

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \frac{x^n}{n+1}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Suites et séries de fonctions, Q8 et Q9

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.
2. Calculer $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} \, dx$.

Suites et séries de fonctions, Q10 et Q11

Suites et séries de fonctions, Q10 et Q11

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x}{(1+x^2)^n}$.

1. Montrer que l'on n'a pas de convergence normale sur $[0,+\infty[$ mais sur $[a,+\infty[$, $a>0$.

Suites et séries de fonctions, Q10 et Q11

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x}{(1+x^2)^n}$.

1. Montrer que l'on n'a pas de convergence normale sur $[0,+\infty[$ mais sur $[a,+\infty[$, $a>0$.
2. Calculer la somme $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$ et montrer que l'on n'a pas convergence uniforme ni sur $[0,+\infty[$ ni sur $]0,+\infty[$.

Séries de Fourier, Q1 et Q2

Séries de Fourier, Q1 et Q2

Soit $E = \left\{ f \ : \ x \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty \right\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}^1([0,1],\mathbb{C})$ et que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = c_n$.

Séries de Fourier, Q1 et Q2

Soit $E = \left\{ f \;:\; x \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty \right\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}^1([0,1],\mathbb{C})$ et que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = c_n$.
2. Montrer que $\|f\|_E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|$ définit une norme sur E et que $\|f\|_{\mathrm{L}^1} \leqslant \|f\|_E$.

Séries de Fourier, Q3

Séries de Fourier, Q3

Soit f une fonction 2π-périodique localement intégrale. On définie la fonction g par, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = f(2t)$. Montrer que g est π-périodique et calculer les coefficients $c_n(g)$ en fonction de ceux de f.

Séries de Fourier, Q4

Séries de Fourier, Q4

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^\pi \frac{1+\cos(x)}{4-2\cos(x)} \cos(nx)\,\mathrm{d}x$.

Séries de Fourier, Q5

Séries de Fourier, Q5

Soient f et $g \in \mathrm{L}^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$. Calculer les coefficients $c_n(fg)$ en fonction de ceux de f et de g.

Séries de Fourier, Q6

Séries de Fourier, Q6

Soit f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Montrer que $G = \{T \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(t+T) = f(t)\}$ muni de l'addition est un groupe.

Séries de Fourier, Q7 et Q8

Séries de Fourier, Q7 et Q8

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$ sur $[-\pi, \pi]$ prolongée en une fonction 2π-périodique.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.

Séries de Fourier, Q7 et Q8

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$ sur $[-\pi, \pi]$ prolongée en une fonction 2π-périodique.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. Calculer les sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Séries de Fourier, Q9

Séries de Fourier, Q9

On définit D_N par, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ D_N(x) = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Séries de Fourier, Q10

Séries de Fourier, Q10

Soit f une fonction T-périodique, continue, positive et non identiquement nulle. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $a_n(f) < \frac{a_0}{2}$.

Questions de cours I

Questions de cours I

1. Si la Hessienne est définie positive que dire de la nature du point critique ?

Questions de cours I

1. Si la Hessienne est définie positive que dire de la nature du point critique ?
2. Énoncer l'inégalité de Bessel.

Questions de cours I

1. Si la Hessienne est définie positive que dire de la nature du point critique ?
2. Énoncer l'inégalité de Bessel.
3. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe somme.

Questions de cours I

1. Si la Hessienne est définie positive que dire de la nature du point critique ?
2. Énoncer l'inégalité de Bessel.
3. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe somme.
4. Énoncer le théorème de Fejér.

Questions de cours I

1. Si la Hessienne est définie positive que dire de la nature du point critique ?
2. Énoncer l'inégalité de Bessel.
3. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe somme.
4. Énoncer le théorème de Fejér.
5. Donner les coefficients $c_n(f)$ en fonction de ceux de $a_n(f)$ et de $b_n(f)$.

Questions de cours I

1. Si la Hessienne est définie positive que dire de la nature du point critique ?
2. Énoncer l'inégalité de Bessel.
3. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe somme.
4. Énoncer le théorème de Fejér.
5. Donner les coefficients $c_n(f)$ en fonction de ceux de $a_n(f)$ et de $b_n(f)$.
6. Écrire la définition des coefficients $a_n(f)$, pour f localement intégrable et T-périodique.

Questions de cours I

1. Si la Hessienne est définie positive que dire de la nature du point critique ?
2. Énoncer l'inégalité de Bessel.
3. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe somme.
4. Énoncer le théorème de Fejér.
5. Donner les coefficients $c_n(f)$ en fonction de ceux de $a_n(f)$ et de $b_n(f)$.
6. Écrire la définition des coefficients $a_n(f)$, pour f localement intégrable et T-périodique.
7. Donner le nombre de lignes et de colonnes de la Jacobienne de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.

Questions de cours I

1. Si la Hessienne est définie positive que dire de la nature du point critique ?
2. Énoncer l'inégalité de Bessel.
3. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe somme.
4. Énoncer le théorème de Fejér.
5. Donner les coefficients $c_n(f)$ en fonction de ceux de $a_n(f)$ et de $b_n(f)$.
6. Écrire la définition des coefficients $a_n(f)$, pour f localement intégrable et T-périodique.
7. Donner le nombre de lignes et de colonnes de la Jacobienne de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.
8. Écrire la définition d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f sur un intervalle I (en terme d'epsilons...).

Questions de cours I

1. Si la Hessienne est définie positive que dire de la nature du point critique ?
2. Énoncer l'inégalité de Bessel.
3. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe somme.
4. Énoncer le théorème de Fejér.
5. Donner les coefficients $c_n(f)$ en fonction de ceux de $a_n(f)$ et de $b_n(f)$.
6. Écrire la définition des coefficients $a_n(f)$, pour f localement intégrable et T-périodique.
7. Donner le nombre de lignes et de colonnes de la Jacobienne de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.
8. Écrire la définition d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f sur un intervalle I (en terme d'epsilons...).
9. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les dérivées partielles pour qu'une fonction soit $\mathscr{C}^1$.

Questions de cours I

1. Si la Hessienne est définie positive que dire de la nature du point critique ?
2. Énoncer l'inégalité de Bessel.
3. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe somme.
4. Énoncer le théorème de Fejér.
5. Donner les coefficients $c_n(f)$ en fonction de ceux de $a_n(f)$ et de $b_n(f)$.
6. Écrire la définition des coefficients $a_n(f)$, pour f localement intégrable et T-périodique.
7. Donner le nombre de lignes et de colonnes de la Jacobienne de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.
8. Écrire la définition d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f sur un intervalle I (en terme d'epsilons...).
9. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les dérivées partielles pour qu'une fonction soit $\mathscr{C}^1$.
10. Pour deux fonctions f et g différentiables sur de bons ensembles, donner la formule de la différentielle de la composée : $d_x(f \circ g).h$.

Questions de cours II

Questions de cours II

1. Donner les implications entre la convergence normale, absolue, simple, uniforme.

Questions de cours II

1. Donner les implications entre la convergence normale, absolue, simple, uniforme.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Exprimer la différentielle en fonction de la dérivée.

Questions de cours II

1. Donner les implications entre la convergence normale, absolue, simple, uniforme.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Exprimer la différentielle en fonction de la dérivée.
3. Pour quel type de fonction parle-t-on de gradient ?

Questions de cours II

1. Donner les implications entre la convergence normale, absolue, simple, uniforme.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Exprimer la différentielle en fonction de la dérivée.
3. Pour quel type de fonction parle-t-on de gradient ?
4. Soit H un espace de Hilbert et $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne. Que vaut $\mathrm{Vect}\{e_i, i \in \mathbb{N}\}^\perp$?

Questions de cours II

1. Donner les implications entre la convergence normale, absolue, simple, uniforme.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Exprimer la différentielle en fonction de la dérivée.
3. Pour quel type de fonction parle-t-on de gradient ?
4. Soit H un espace de Hilbert et $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne. Que vaut $\mathrm{Vect}\{e_i, i \in \mathbb{N}\}^\perp$?
5. Pourquoi la Hessienne est-elle diagonalisable ?

Questions de cours II

1. Donner les implications entre la convergence normale, absolue, simple, uniforme.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Exprimer la différentielle en fonction de la dérivée.
3. Pour quel type de fonction parle-t-on de gradient ?
4. Soit H un espace de Hilbert et $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne. Que vaut $\mathrm{Vect}\{e_i, i \in \mathbb{N}\}^{\perp}$?
5. Pourquoi la Hessienne est-elle diagonalisable ?
6. Énoncer le théorème de projection dans un Hilbert.

Questions de cours II

1. Donner les implications entre la convergence normale, absolue, simple, uniforme.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Exprimer la différentielle en fonction de la dérivée.
3. Pour quel type de fonction parle-t-on de gradient ?
4. Soit H un espace de Hilbert et $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne. Que vaut $\mathrm{Vect}\{e_i, i \in \mathbb{N}\}^\perp$?
5. Pourquoi la Hessienne est-elle diagonalisable ?
6. Énoncer le théorème de projection dans un Hilbert.
7. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application $\mathscr{C}^1$. Donner l'espace de départ et d'arrivée de l'application différentielle df.

Questions de cours II

1. Donner les implications entre la convergence normale, absolue, simple, uniforme.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Exprimer la différentielle en fonction de la dérivée.
3. Pour quel type de fonction parle-t-on de gradient ?
4. Soit H un espace de Hilbert et $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne. Que vaut $\mathrm{Vect}\{e_i, i \in \mathbb{N}\}^\perp$?
5. Pourquoi la Hessienne est-elle diagonalisable ?
6. Énoncer le théorème de projection dans un Hilbert.
7. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application $\mathscr{C}^1$. Donner l'espace de départ et d'arrivée de l'application différentielle df.
8. Écrire la définition d'un minimum local de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en a.

Questions de cours II

1. Donner les implications entre la convergence normale, absolue, simple, uniforme.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Exprimer la différentielle en fonction de la dérivée.
3. Pour quel type de fonction parle-t-on de gradient ?
4. Soit H un espace de Hilbert et $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne. Que vaut $\mathrm{Vect}\{e_i, i \in \mathbb{N}\}^\perp$?
5. Pourquoi la Hessienne est-elle diagonalisable ?
6. Énoncer le théorème de projection dans un Hilbert.
7. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application $\mathscr{C}^1$. Donner l'espace de départ et d'arrivée de l'application différentielle df.
8. Écrire la définition d'un minimum local de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en a.
9. Écrire le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.

Questions de cours II

1. Donner les implications entre la convergence normale, absolue, simple, uniforme.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Exprimer la différentielle en fonction de la dérivée.
3. Pour quel type de fonction parle-t-on de gradient ?
4. Soit H un espace de Hilbert et $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne. Que vaut $\mathrm{Vect}\{e_i, i \in \mathbb{N}\}^{\perp}$?
5. Pourquoi la Hessienne est-elle diagonalisable ?
6. Énoncer le théorème de projection dans un Hilbert.
7. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application $\mathscr{C}^1$. Donner l'espace de départ et d'arrivée de l'application différentielle df.
8. Écrire la définition d'un minimum local de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en a.
9. Écrire le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.
10. Écrire la définition d'une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers f sur un intervalle I (en terme d'epsilons...).

Le Pictionamaths

1. La nappe d'équation $z = (y - x)^2 + 3$
2. La nappe d'équation $z = x^2 + y^2 + 3$.
3. Une dérivée directionnelle
4. Une dérivée partielle
5. Un projecteur orthogonal
6. L'orthogonal à un vecteur
7. Une application coordonnée
8. Un minimum local
9. Un minimum global
10. Un point selle
11. Une suite de fonction convergeant simplement
12. Une suite de fonctions ne convergeant pas simplement
13. Une suite de fonction convergeant uniformément
14. Une fonction périodique
15. Un polynôme trigonométrique
16. Une fonction différant au moins en un point de sa série de Fourier